Pe marginea materialelor publicate în Gazeta matematică

Constantin P. Niculescu, Universitatea din Craiova[1]

Scopul acestei rubrici este acela de a comenta diferitele rezultate apărute în paginile Gazetei matematice, cu scopul de a evidenția noi consecințe şi noi conexiuni, de a prezenta demonstrații mult mai scurte, de a discuta aspectele de prioritate etc. Cititorii dornici de a contribui la această rubrică mă pot contacta fie pe adresa Universității din Craiova, fie prin e-mail, la adresa tempus@oltenia.ro

Inegalitățile lui Landau

Un interesant articol al domnului T. Trif [15] aduce în atenția cititorilor Gazetei matematice următorul rezultat din analiza matematică, pentru care indică o abordare elementară:

Teoremă. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită, de n ori derivabilă, cu proprietatea că derivata sa de ordinul n este lipschitziană, adică există o constantă $L > 0$ aşa încât*

(Lip) $$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leq L\,|x - y| \quad \textit{pentru orice } x,y \in \mathbf{R}.$$

Atunci toate derivatele intermediare $f', \ldots, f^{(n)}$ sunt mărginite. În plus,

(D) $$\sup_{x\in R} |f^{(k)}(x)| \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \left(\sup_{x\in R} |f(x)|\right)^{1-\frac{k}{n+1}} L^{\frac{k}{n+1}}$$

pentru orice $k \in \{1,\ldots,n\}$.

Unele comentarii bibliografice (omise în articolul citat mai sus) sunt necesare. Astfel, acest rezultat se încadrează în aşa numita teorie a *inegalităților lui Landau*, care se poate rezuma în faptul că dacă o funcție şi derivata sa de un anumit ordin sunt "mici", atunci şi derivatele intermediare sunt "mici". Investigația acestor inegalități a fost inițiată de E. Landau [9] care a demonstrat că dacă $I = \mathbf{R}$, sau $I = \mathbf{R}_+$ şi $f : I \to \mathbf{R}$ *este o funcție de două ori derivabilă, cu proprietatea că ea şi derivata sa de ordinul doi sunt mărginite, atunci şi prima derivată este mărginită şi are loc relația*

---

[1] Articol publicat în *Gazeta matematică*, revistă de cultură matematică pentru tineret, **CVI**, nr. 2/2001, pp. 64-66.

$$\text{(L)} \qquad \sup_{x\in I} |f'(x)| \le C_\infty(I)\left(\sup_{x\in I}|f(x)|\right)^{1/2}\left(\sup_{x\in I}|f''(x)|\right)^{1/2};$$

cea mai bună constantă $C_\infty(I)$ verifică $C_\infty(R)=\sqrt{2}$ şi $C_\infty(R_+)=2$.

În 1932, G. H. Hardy şi J. E. Littlewood [6] au demonstrat o inegalitate asemănătoare, în care condiția de mărginire era înlocuită cu apartenența la spațiul $L^2(I)$, al funcțiilor de pătrat integrabil (în sensul lui Lebesgue); în cazul funcțiilor continue $f: I \to \mathbf{R}$, apartenența la spațiul $L^2(I)$ înseamnă că

$$\| f \|_2 = \left(\int_I f^2(x)\, dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Ei au obținut pentru (L) următorul analog:

$$\text{(H\&L)} \qquad \| f' \|_2 \le C_2(I) \| f \|_2^{1/2} \cdot \| f'' \|_2^{1/2},$$

unde cea mai bună constantă $C_2(I)$ verifică $C_2(R)=1$ şi $C_2(R_+)=\sqrt{2}$. În 1935, G. H. Hardy, E. Landau şi J. E. Littlewood [7], au extins (H&L) pentru toate spațiile $L^p(I)$ cu $1 \le p < \infty$.,

$$\text{(HLL)} \qquad \| f' \|_p \le C_p(I) \| f \|_p^{1/2} \cdot \| f'' \|_p^{1/2},$$

demonstrând că $C_p(R) \le 2$. Se poate arăta că de fapt $C_p(R) \le \sqrt{2}$. Vezi [5].

În 1939, A. N. Kolmogorov [1] a demonstrat extensia inegalităților (L) la cazul funcțiilor de n+1 ori derivabile,

$$\text{(K)} \qquad \sup_{x\in I} |f^{(k)}(x)| \le C_\infty(n,k,I)\left(\sup_{x\in I}|f(x)|\right)^{k/(n+1)}\left(\sup_{x\in I}|f^{(n+1)}(x)|\right)^{1-k/(n+1)}$$

indicând şi cele mai bune constante $C_\infty(n,k,I)$ pentru k∈ {1,…,n} şi I = **R,** sau I = $\mathbf{R}_+$**.** Şi inegalitățile (HLL) se pot generaliza la cazul funcțiilor de n+1 ori derivabile, dar *nu* se cunosc valorile celor mai bune constante.

Dacă o funcție $f: I \to \mathbf{R}$ este de n+1 ori derivabilă şi $|f^{(n+1)}(x)| \le L$ pentru orice $x \in I$, atunci conform teoremei creşterilor finite, $f^{(n)}$ este lipschitziană şi verifică inegalitatea (Lip). Prin urmare, teorema citată mai sus apare ca o îmbunătățire a inegalităților (K) ale lui Kolmogorov, cerând funcției "mai puțină netezime". În această formă, ea a fost demonstrată pentru prima dată de Z. Ditzian [3].

Ideea extinderii unor rezultate de analiză matematică prin înlocuirea cerinței ca "$f : I \to \mathbf{R}$ să aibă derivată mărginită" cu aceea ca "f să fie lipschitziană" este însă mult mai veche. Dar, aşa cum a fost observat încă de H. Rademacher, o funcție lipschitziană nu poate fi foarte nederivabilă. În fapt, ea este derivabilă aproape peste tot! Vezi [14].

Toată discuția de mai sus a privit cu precădere funcțiile definite pe $\mathbf{R}$ sau $\mathbf{R}_+$ şi operatorul de derivare. Inegalitățile lui Landau au fost extinse şi la alte intervale (vezi de exemplu [1]) şi pentru alți operatori (vezi [2], [3], [5], [11], [12]), ele constituind şi în prezent un subiect peren de investigație ştiințifică.

Bibliografie

[1] C. K. Chui and P. W. Smith, *A note on Landau's problem for bounded intervals*, Amer. Math. Monthly, **82** (1975), 927-929.

[2] Z. Ditzian, *Some remarks on Inequalities of Landau and Kolmogorov*, Aequationes Mathematicae, **12** (1975), 145-151.

[3] Z. Ditzian, *A New Fractional Form of the Landau-Kolmogorov Inequality*, J. Math. Anal. Appl. **148** (1990), 528-537.

[4] Z. Ditzian, *Remarks, questions and conjectures on Landau-Kolmogorov-type inequalities*, Math. Inequal. Appl., **3** (2000), 15-24.

[5] J. A. Goldstein and F. Räbiger, *On Hardy-Landau-Littlewood Inequalities*. Semesterbericht Funktionanalysis. Workshop on Operator Semigroups and Evolution Equations, Blaubeuren, October 30 - November 3, 1989, pp. 61-75, Tűbingen, 1990.

[6] G. H. Hardy şi J. E. Littlewood, *Some integral inequalities connected with calculus of variations*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 3 (1932), 241-252.

[7] G. H. Hardy, E. Landau şi J. E. Littlewood, *Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions*, Math. Z., 39 (1935), 677-695.

[8] A. N. Kolmogorov, *On inequalities between the upper bounds of the succesive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval*, Ucebn. Zap. Moskov. Gos. Univ. Mat., **30** (1939), 3-13; Traducerea engleză în Amer. Math. Soc. Transl., 1 (1949), no. 4, 1-19.

[9] E. Landau, *Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen*, Proc. London Math. Soc., **13** (1914), 43-49.

[10] E. Landau, *Die Ungleichungen für zweimal differentzierbare Funktionen*, Danske Vid. Selsk, Math. Fys. Medd., **6** (1925), no. 10, 49 pages.

[11] Ju. I. Ljubic, *On inequalities between the powers of a linear operator*, Izv. Akad.Nauk SSSR Ser. Mat., **24** (1960), 825-864; Traducere engleză în Amer. Math. Soc. Transl., **40** (1964), no. 2, 39-84.

[12] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), 116-162.

[13] I. J. Schoenberg, *The elementary cases of Landau's problem of inequalities between derivatives*, Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 121-158.
[14] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
[15] T. Trif, *Asupra unei probleme de analiză*, Gazeta matematică, **CI** (1996), 77-81.

Prof. Constantin P. Niculescu, Universitatea din Craiova, Facultatea de matematică-informatică, Str. A. I. Cuza 13, Craiova 1100.